

8. Формулы и способы их задания, эквивалентность формул и функционалы их сложности. Оптимизация подобных формул по глубине

Формула

Пусть $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ – счетный упорядоченный алфавит входных БП и пусть $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_b\}$ – базис, где ФАЛ $\varphi_i, i = 1 \dots b$ зависит от $k_i, k_i \geq 1$, БП и является существенной ФАЛ, если $k_i \geq 2$. Предполагается, что базис полный, и допускается, в общем случае, наличие в нем равных ФАЛ.

Любая переменная x_i из $\mathcal{X}$ считается **формулой глубины 0** или **тривиальной формулой** над базисом $\mathcal{B}$, которая реализует функцию x_i . Если $i \in [1, b]$ и для каждого $j, j \in [1, k_i]$, определена формула $\mathcal{F}_j$ глубины q_j над $\mathcal{B}$, которая реализует ФАЛ f_j , то запись вида $\mathcal{F} = \varphi_i(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i})$ является **формулой глубины q** над $\mathcal{B}$, где $q = \max\{q_1, \dots, q_{k_i}\} + 1$, которая реализует ФАЛ f вида $f = \varphi_i(f_1, \dots, f_{k_i})$.

Все записи, полученные в результате указанного индуктивного построения, и только они считаются формулами над базисом $\mathcal{B}$. При этом формулы, полученные в процессе индуктивного построения формулы $\mathcal{F}$, называются ее **подформулами**, а те подформулы $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{k_i}$, из которых на последнем шаге индуктивного построения строится формула $\mathcal{F}$, считаются ее **главными подформулами**.

Под **сложностью (рангом)** формулы $\mathcal{F}$ понимается число вхождений в нее функциональных символов (соответственно символов переменных), которое обозначается через $L(\mathcal{F})$ (соответственно $R(\mathcal{F})$).

«Графически» совпадающие формулы называются **изоморфными**, а формулы, реализующие равные функции, – **эквивалентными**.

Множество всех формул над базисом $\mathcal{B}$ будем обозначать через $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}^{\Phi}$ и положим $\mathcal{U}_{\mathcal{B}_0}^{\Phi} = \mathcal{U}^{\Phi}$.

Задание формулы в виде дерева

Индукцией по глубине любой формуле глубины q над $\mathcal{B}$ можно сопоставить **упорядоченное ориентированное корневое дерево** глубины q , каждому листу которого приписана БП из $\mathcal{X}$, а каждой внутренней вершине — функциональный символ (ФС) из $\mathcal{B}$. Формуле x_j глубины 0 сопоставим «тривиальное» дерево с единственной вершиной, являющейся корнем и листом одновременно, которой приписана БП x_j .

Ранг $R(\mathcal{F})$ формулы $\mathcal{F}$ равен числу листьев связанного с ней дерева $\mathcal{D}$, ее сложность $L(\mathcal{F})$ равна числу остальных вершин $\mathcal{D}$, а ее глубина $D(\mathcal{F})$ — глубине его корня.

Лемма

Для формулы $\mathcal{F}, \mathcal{F} \in \mathcal{U}^{\Phi}$, выполняются неравенства

$$R(\mathcal{F}) = L_{\&v}(\mathcal{F}) + 1 \leq L(\mathcal{F}) + 1 \leq 2^{D(\mathcal{F})},$$

где $L_{\&v}(\mathcal{F})$ – число ФС $\&$ и v в формуле $\mathcal{F}$.

Следствие

$$D(\mathcal{F}) \geq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil.$$

Эквивалентное преобразование (ЭП)

Если позиционную подформулу вида $\hat{\mathcal{F}}'$ (вида $\hat{\mathcal{F}}''$) формулы $\mathcal{F}$ заменить, учитывая тождество $\hat{\mathcal{F}}: \hat{\mathcal{F}}' = \hat{\mathcal{F}}''$, эквивалентной ей формулой $\hat{\mathcal{F}}''$ (соответственно $\hat{\mathcal{F}}'$), то полученная в результате такой замены формула будет эквивалентна формуле $\mathcal{F}$.

Подобные формулы

Формулы из $\mathcal{U}^\Phi$, получающиеся друг из друга эквивалентными преобразованиями на основе тождеств $t_{\&}^K$, t_V^K , $t_{\&}^A$, t_V^A называются **подобными**.

Тождества де Моргана

Формулы из $\mathcal{U}^\Phi$ можно оптимизировать также по числу отрицаний с помощью эквивалентных преобразований на основе тождеств

$$t_{\&}^M: \overline{(x_1 \cdot x_2)} = \bar{x}_1 \vee \bar{x}_2, \quad t_V^M: \overline{(x_1 \vee x_2)} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2, \quad t_-^M: \overline{(\bar{x}_1)} = x_1$$

Формула с поднятыми отрицаниями

Формула, в которой все ФС отрицания встречаются только над БП, называется **формулой с поднятыми отрицаниями**.

Альтенирование формулы с поднятыми отрицаниями

$\text{At}(\mathcal{F})$ – максимальное число изменений типов ФС $\&$ и $\vee$ в цепях дерева, соответствующего формуле.

Теорема

Для любой формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями из $\mathcal{U}^\Phi$ существует подобная ей формула $\check{\mathcal{F}}$ такая, что

$$D(\check{\mathcal{F}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{F}) + 1) \rceil + \text{At}(\mathcal{F}).$$

Следствие 1

Для любой ЭК или ЭД K существует подобная формула $\check{K}$ такая, что

$$D(\check{K}) = \lceil \log(L(K) + 1) \rceil,$$

которая минимальна по глубине.

Следствие 2

Для любой ДНФ или КНФ $\mathcal{U}$ существует подобная формула $\check{\mathcal{U}}$ такая, что

$$D(\check{\mathcal{U}}) \leq \lceil \log(L(\mathcal{U}) + 1) \rceil + 1.$$

9. Схемы из функциональных элементов (СФЭ) и операции их приведения.

Оценка числа формул и СФЭ в базисе $B_0 = \{\&, \vee, -\}$

Сеть

Набор вида $\mathcal{G} = (G; V'; V'')$, где G – граф, а V' и V'' – выборки из множества $V(G)$ длины p и q соответственно, причем выборка V' является выборкой без повторений, называется **(p, q) -сетью**.

Схема из функциональных элементов (СФЭ)

Пусть Z – счетный упорядоченный алфавит выходных БП, который не имеет общих БП с алфавитом $\mathcal{X}$. Сопоставим каждому функциональному символу (ФС) $\varphi_i, i = 1, \dots, b$, функциональный элемент (ФЭ) $\mathcal{E}_i$, имеющий k_i входов, причем входу с номером j соответствует j -ая БП x_j ФАЛ φ_i , где $j = 1, \dots, k_i$, и один выход, на котором эта ФАЛ реализуется.

Схемой из функциональных элементов над базисом B называется ориентированная ациклическая упорядоченная сеть Σ , входная выборка которой состоит из всех истоков Σ , а вершины помечены следующим образом:

- каждому входу (выходу) Σ сопоставлена БП из $\mathcal{X}$ (соответственно Z), являющаяся пометкой связанной с ним вершины, причем различным входам (выходам) сопоставлены различные БП, а упорядоченность вершин во входной и выходной выборках Σ определяется упорядоченностью сопоставленных им БП;
- каждая отличная от истока вершина v схемы Σ помечена ФС φ_i , где $k_i = d_{\Sigma}^+(v)$.

Квазидерево

Схема Σ , которая получается из дерева $\mathcal{D}$, связанного с формулой $\mathcal{F}$ из $\mathcal{U}_B^{\Phi}$, в результате отождествления листьев с одинаковыми пометками и приписывания его корню выходной БП из Z , называется **квазидеревом, соответствующим формуле $\mathcal{F}$** .

Изоморфные и эквивалентные СФЭ

Две СФЭ называются **изоморфными**, если они изоморфны как помеченные графы, и **эквивалентными**, если они реализуют равные системы ФАЛ.

Изменение нумерации дуг, входящих в такую вершину v схемы Σ , которой сопоставлен ФЭ $\mathcal{E}_i$ с симметрической ФАЛ φ_i , не изменяет ФАЛ, реализуемую в вершине v , а значит, не влияет на функционирование СФЭ. Схемы, получающиеся друг из друга в результате указанных преобразований, называются **квази-изоморфными**.

Приведенная СФЭ

Вершина СФЭ называется **висячей**, если она является стоком, но не является выходом схемы. Схема называется **приведенной**, если в ней нет висячих вершин.

Функционалы сложности СФЭ

Для каждой СФЭ $\Sigma, \Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, определены следующие **функционалы сложности**:

- $L(\Sigma)$ – **сложность** Σ , т. е. число всех ее ФЭ
- $D(\Sigma)$ – **глубина** Σ , т. е. максимальная глубина ее вершин
- $R(\Sigma)$ – **ранг** Σ , т. е. число дуг, исходящих из ее входов

Лемма

Для приведенной СФЭ $\Sigma, \Sigma \in \mathcal{U}_B^C$, с одним выходом выполняются неравенства

$$R(\Sigma) \leq L_{\&, \vee}(\Sigma) + 1 \leq L(\Sigma) + 1 \leq 2^{D(\Sigma)}, \text{ где } L_{\&, \vee}(\Sigma) - \text{число ФЭ } \& \text{ и } \vee \text{ в } \Sigma.$$

Обозначим через $\mathcal{U}_B^\Phi(L, n)$ и $\mathcal{U}_B^\Phi[D, n]$ множества формул $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n)$ над базисом B , для которых $L(\mathcal{F}) \leq L$ и $D(\mathcal{F}) \leq D$. Индекс B_0 будем опускать.

Лемма

Обозначим $|\mathcal{U}^\Phi|$ ($\|\mathcal{U}^\Phi\|$) – число попарно не изоморфных (попарно не эквивалентных) схем в $\mathcal{U}^\Phi$.

Для любых натуральных n, L, D выполняются неравенства

$$|\mathcal{U}^\Phi(L, n)| \leq (10n)^{L+1}$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi(L, n)\| \leq (8n)^{L+1}$$

$$\|\mathcal{U}^\Phi[D, n]\| \leq (8n)^{2^D}$$

Следствие

Число попарно не квазиизоморфных формул с поднятыми отрицаниями от БП $X(n)$ ранга не больше, чем R , не превосходит $(12n)^R$.

Лемма

Для любых натуральных n и L выполняется неравенство

$$\|\mathcal{U}^C(L, n)\| \leq (8(L + n))^{L+1}.$$

10. Контактные схемы (КС) и π -схемы, моделирование формул и π -схем.

Оценки числа КС и числа π -схем, особенности функционирования многополюсных КС.

Контактная схема

Сеть Σ с входами $a'_1, \dots, a'_p$ и выходами $a''_1, \dots, a''_q$, в которой все ребра (дуги) помечены переменными $x_1, \dots, x_n$ или их отрицаниями, называется **(p, q)-контактной схемой** (КС) от БП $x_1, \dots, x_n$ и обозначается $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n)$ или $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_p; a''_1, \dots, a''_q)$.

При этом число контактов называется **сложностью** КС и обозначается $L(\Sigma)$.

Функция проводимости для вершин

Пусть Σ – КС от БП $X(n)$ и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – набор из B^n . Определим сеть $\Sigma|_\alpha$ как сеть, получающуюся из Σ путем удаления всех ребер с пометками $x_1^{\bar{\alpha}_1}, \dots, x_n^{\bar{\alpha}_n}$, то есть ребер, которые не проводят на наборе α , и снятия пометок с остальных ребер.

Для вершин v и u КС Σ введем **функцию проводимости** от вершины v к вершине u как ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$, которая равна 1 на наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ тогда и только тогда, когда в сети $\Sigma|_\alpha$ существует $(v - u)$ – цепь, то есть тогда и только тогда, когда в Σ имеется цепь из проводящих на наборе α контактов вида $x_1^{\alpha_1}, \dots, x_n^{\alpha_n}$, идущая из v в u .

ФАЛ $g_{v,u}(x_1, \dots, x_n)$ называют также **функцией достижимости** вершины u из вершины v ($g_{v,u}$ реализуется между вершинами v и u).

Изоморфные и эквивалентные схемы

Две схемы называются **изоморфными**, если изоморфны соответствующие им графы, и **эквивалентными**, если они реализуют равные системы ФАЛ.

Функция проводимости для множества контактов

Для множества C , состоящего из контактов вида $x_{i_1}^{\sigma_1}, \dots, x_{i_r}^{\sigma_r}$ в КС Σ , определим его **функцию проводимости** $K(C)$ и **функцию отделимости** $J(C)$ как ФАЛ вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{i_r}^{\sigma_r}$ и $x_{i_1}^{\bar{\sigma}_1} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\bar{\sigma}_r}$ соответственно. При этом множество C называется **проводящим (отделимым)**, если $K(C) \neq 0$ ($J(C) \neq 1$), и **нулевым** (соответственно, **единичным**) в противном случае.

π -схема

Простейшей **π -схемой** считается любая $(1, 1)$ -КС, которая состоит из одного контакта, соединяющего полюса. Если π -схемы Σ_1, Σ_2 уже определены, то $(1, 1)$ -КС $\Sigma' (\Sigma'')$, которая получается в результате их параллельного (последовательного) соединения, тоже является π -схемой.

Лемма

Любой π -схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F} \in \mathcal{U}^\Phi$ с поднятыми отрицаниями, такую, что $R(\mathcal{F}) = L(\Sigma)$ и обратно.

Приведенная КС

$(1, m)$ -КС называется **приведенной**, если все изолированные вершины Σ являются ее полюсами, а все контакты и остальные вершины Σ принадлежат простым проводящим цепям, соединяющим ее вход и выходы.

Оценка числа КС различных типов

Пусть $\mathcal{U}^K$ и $\mathcal{U}^\pi$ – множество всех КС из неориентированных контактов и множество всех π –схем соответственно. Через $\mathcal{U}^K(L, n)$ (соответственно $\mathcal{U}^\pi(L, n)$) будем обозначать множество приведенных $(1, 1)$ -схем Σ из $\mathcal{U}^K$ (соответственно $\mathcal{U}^\pi$) от БП $X(n)$, для которых $L(\Sigma) \leq L$.

Обозначим $|\mathcal{U}|$ ($||\mathcal{U}||$) – число попарно не изоморфных (попарно не эквивалентных) схем в $\mathcal{U}$.

Лемма

При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$||\mathcal{U}^\pi(L, n)|| \leq (12n)^L.$$

Лемма

При любых натуральных L и n выполняется неравенство

$$||\mathcal{U}^K(L, n)|| \leq (8nL)^L.$$

Особенности функционирования КС с несколькими входами

Будем считать, что в каждой вершине (p, q) -КС Σ реализуется столбец, составленный из p ФАЛ проводимости от входов Σ к этой вершине, а сама КС Σ реализует матрицу, которая состоит из q столбцов, реализованных на ее выходах. Таким образом, функционирование КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a'_1, \dots, a'_p; a''_1, \dots, a''_q)$ представляет собой матрицу $F = F(x_1, \dots, x_n)$ с p строками, q столбцами и элементами из $P_2(n)$, для которой $F\langle i, j \rangle$ – ФАЛ, реализуемая между a'_i и a''_j , где $i \in [1, p]$, $j \in [1, q]$.

Функционирование КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$ с неразделенными полюсами определяется как функционирование КС с разделенными полюсами вида $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m; a_1, \dots, a_m)$. В этом случае матрица F является **рефлексивной и транзитивной** матрицей, а если, кроме того, Σ – неориентированная сеть, то и **симметричной** матрицей.

Любая симметрическая, транзитивная и рефлексивная матрица $F, F \in (P_2(n))^{m,m}$, реализуется КС $\Sigma = \Sigma(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_m)$, которая представляет собой объединение всех КС $\Sigma_{ij} = \Sigma_{ij}(x_1, \dots, x_n; a_i; a_j)$, где $1 \leq i < j \leq m$, а КС Σ_{ij} является π -схемой и построена по совершенной ДНФ ФАЛ $F\langle i, j \rangle$ и считается канонической КС матрицы F .

11. Понятие подсхемы и принцип эквивалентной замены, операция суперпозиции схем и её корректность. Каскадные и разделительные КС, лемма Шеннона.

Присоединение противоположных контактов

Пусть $(1, m)$ -КС Σ получается из $(1, \tilde{m})$ -КС $\tilde{\Sigma}$ в результате добавления новой выходной вершины v , которая соединяется с выходными вершинами v_0 и v_1 КС $\tilde{\Sigma}$ контактами $\bar{x}_i$ и x_i соответственно. Если в вершинах v_0 и v_1 реализовывались функции g_0 и g_1 соответственно, то в вершине v будет реализовываться функция $g = \bar{x}_i g_0 \vee x_i g_1$.

Каскадная контактная схема

Приведенная КС без изолированных полюсов, которая может быть получена из системы тождественных вершин в результате ряда операций присоединения одного или двух противоположных контактов и операций переименования выходов.

Каскадная КС (ККС) считается **полной**, если она была построена без использования операции присоединения одного контакта.

Вершина ККС, введенная в нее с помощью операции присоединения одного контакта, называется **неполной** вершиной этой ККС.

Дополнение неполной ККС

ККС Σ'' является **дополнением** неполной ККС Σ' , если она получается в результате соединения всех неполных вершин Σ' отсутствующими в них контактами с новым входом, удаления всех «старых» входов и перехода к соответствующей приведенной КС. При этом $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$, а объединение Σ' и Σ'' является полной ККС.

Инверсная ККС

Дополнение Σ'' к полной ККС Σ с 1 входом называется **инверсной** к Σ' ККС.

Лемма

Если $(1, m)$ -ККС Σ' реализует систему ФАЛ $F' = (f'_1, \dots, f'_m)$, то существует $(1, m)$ -ККС Σ'' , которая реализует систему ФАЛ $\bar{F}' = (\bar{f}'_1, \dots, \bar{f}'_m)$ и для которой $L(\Sigma'') \leq 2L(\Sigma')$.

Операция суперпозиции функций

Тождественная вершина

Базисом является обычно схема из одной изолированной вершины, являющейся ее входом. Указанная вершина называется **тождественной вершиной** кратности $k, k \geq 0$, если она одновременно является k -кратным выходом данной схемы. При этом кратность 1, как правило, не указывается, а тождественная вершины кратности 0 считается **фиктивной**.

Простейшие виды суперпозиции схем

1. Операция переименования входов схемы с возможным их отождествлением;
2. Операция переименования выходов схемы с возможным их дублированием или снятием;
3. Операция объединения схем, не имеющих общих вершин и общих вход-выходных пометок, понимаемая как обычное объединение соответствующих графов.

Суперпозиция общего вида

Будем говорить, что схема Σ имеет вид $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, то есть является суперпозицией схем без общих вершин и вход-выходных пометок, если она получается в результате объединения этих схем и присоединения (части) входов схемы Σ'' к (некоторым) выходам схемы Σ' .

Бесповторная суперпозиция

Суперпозиция вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ считается **бесповторной**, если различные входы Σ'' присоединяются к различным выходным вершинам Σ' .

Стыковка

Суперпозиция вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ называется **стыковкой**, если число входов схемы Σ'' равно числу выходов схемы Σ' , и каждый вход Σ'' присоединяется к выходу Σ' с тем же номером.

Правильная суперпозиция

Если схема $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$ реализует функции, получающиеся в результате соответствующей подстановки (всех или части) функций, реализованных схемой Σ' вместо (всех или части) входных переменных схемы Σ'' , то такая суперпозиция называется **правильной**.

Корректная суперпозиция

Правильная суперпозиция называется **корректной**, если, кроме того, в любой вершине Σ , которая соответствует выходной вершине Σ' , реализуется та же самая функция, что и в Σ' .

Разделительная по входам (выходам) схема

Схема называется **разделительной** по входам (выходам), если ФАЛ проводимости между любыми ее различными входами (соответственно выходами) равна 0.

Разделительная на наборе КС

Будем говорить, что КС Σ от БП $x_1, \dots, x_n$ разделительная на наборе $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ значений этих БП, если соответствующей разделительностью обладает сеть $\Sigma|_\alpha$.

Лемма Шеннона

Пусть КС Σ является результатом стыковки вида $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, а F, F', F'' – матрицы, реализуемые соответствующими КС. Тогда

$$F \geq F' \cdot F'' \text{ и } F = F' \cdot F'',$$

если КС Σ'' разделительна по входам или если КС Σ' разделительна по выходам.

Следствие 1

В случае разделительности КС Σ'' по входам в каждой вершине КС $\Sigma = \Sigma''(\Sigma')$, которая соответствует выходу КС Σ' , реализуется тот же самый столбец ФАЛ, что и в КС Σ' , то есть рассматриваемая суперпозиция является корректной.

Следствие 2

Равенство $F = F' \cdot F''$ выполняется на любом наборе значений БП, на котором КС Σ'' разделительна по входам или если КС Σ' разделительна по выходам.